

 SESSION 2023**Baccalauréat de l'Enseignement Général — Série S**
Épreuve de Mathématiques

Durée : 4 heures — Coefficient : 6

*Les exercices et les problèmes sont obligatoires.***Exercice 1**

3 points

A. On considère le système (S) :

$$\begin{cases} 3y + 2z = 7 \\ x + y - z = 2 \\ 2x + y - 3z = 1 \end{cases}$$

1. Écrire (S) sous la forme matricielle : $AX = B$ où A est une matrice carrée d'ordre 3 et X et B deux matrices colonnes d'ordre 3. (0,25 pt)

2. Soit $P = \begin{pmatrix} -2 & 11 & -5 \\ 1 & -4 & 2 \\ -1 & 6 & -3 \end{pmatrix}$

Calculer $A \times P$ et $P \times A$. Conclure. (0,75 pt)

3. En déduire la matrice X . (0,25 pt)

B. On dispose deux urnes U_1 et U_2 . L'urne U_1 contient trois boules blanches et une boule noire. L'urne U_2 contient une boule blanche et une boule noire. Toutes les boules sont indiscernables au toucher. On appelle E l'épreuve suivante : On tire une boule de U_1 et on la met dans U_2 puis on tire au hasard et simultanément deux boules de U_2 .

Soit A l'événement : « obtenir deux boules blanches au deuxième tirage. »

1. Montrer que la probabilité de l'événement A est égale à $\frac{1}{4}$. (0,75 pt)

2. On répète trois fois de suite et d'une manière indépendante l'épreuve E .

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de réalisations de l'événement A .(a) Donner la loi de X . (0,75 pt)(b) Calculer l'écart-type de X . (0,25 pt)**Exercice 2**

2 points

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.On donne un point $A(2; 2; 1)$ et un plan $(\mathcal{P})$ d'équation : $3x + 2y + 6z + 33 = 0$.

1. Vérifier que $(\mathcal{P})$ est strictement parallèle à un plan (Q) contenant A et de vecteur normal $\vec{n}(-3; -2; -6)$. (0,25 pt)
2. Déterminer la distance qui sépare ces deux plans. (0,75 pt)
3. Soit $H(-1; 0; -5)$.
Justifier que $H \in (\mathcal{P})$ et que (AH) et $(\mathcal{P})$ sont orthogonaux. (0,75 pt)
4. Calculer $\|\vec{AH}\|$. (0,25 pt)

Problème 1

7 points

Dans le plan orienté $(\mathcal{P})$, on considère un triangle ABC , rectangle et isocèle en A tel que $AB = 4\text{cm}$ et $(\vec{AB}, \vec{AC}) = \frac{\pi}{2}$. On désigne par O le milieu de $[BC]$ et E celui de $[AC]$.

Soient :

- r_1 : la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$
- r_2 : la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$

On pose $f = r_1 \circ r_2$.

Partie I

1. (a) Justifier que f est une symétrie centrale. (0,5 pt)
(b) En décomposant r_1 et r_2 en deux symétries orthogonales d'axes convenablement choisis, déterminer le centre de f . (0,75 pt)
2. Soient $D = \text{bary}\{(A, 1); (B, -1); (C, -1)\}$ et $G = \text{bary}\{(B, 1 - \sqrt{2}); (A, \sqrt{2})\}$
(a) Déterminer les points D et G . (0,25 pt $\times 2$)
(b) Déterminer et construire l'ensemble (Γ) des points M du plan $(\mathcal{P})$ vérifiant $MA^2 - MB^2 - MC^2 = -12$. (0,25 pt $\times 2$)
3. Soit $\bar{S}$ la similitude plane indirecte qui laisse invariant le point B et transforme A en C . Notons par F le centre de $[CG]$.
(a) Vérifier qu'il existe une homothétie h de centre B et transforme A en G dont on précisera le rapport. (0,75 pt)
(b) En déduire les éléments caractéristiques de $\bar{S}$. (0,75 pt)
4. On note par :
– $(\mathcal{C})$ le cercle de centre C et de rayon 2
– I le point d'intersection de $(\mathcal{C})$ et (Γ) dont I se trouve à l'extérieur du carré $ABDC$.

Montrer que I est le centre de la similitude plane directe S , de

rapport $\sqrt{3}$, d'angle $\frac{\pi}{2}$ et qui transforme C en D . (0,75 pt)

Partie II

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$. On donne $D(1+i)$

- Ecrire l'expression complexe de r_1 et r_2 (0,5 pt)
 - En déduire l'expression complexe, la nature et l'élément caractéristique de f . (0,75 pt)
- Déterminer l'expression complexe et les éléments caractéristiques de $\bar{S}$. (0,75 pt)
- Déterminer l'expression complexe de S et préciser l'affixe de son centre. (0,5 pt)

Problème 2

8 points

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, On note par f_n la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = e^{nx} \ln(1 + e^{-nx})$$

On désigne par $(\mathcal{C}_n)$ la courbe représentative de f_n dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 2cm.

Partie A

- Calculer les limites de f_n aux bornes de son ensemble de définition (Poser $X = e^{-nx}$) (0,25 pt $\times$ 2)
- On considère la fonction numérique g_n ; $n \in \mathbb{N}^*$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g_n(x) = \ln(1 + e^{-nx}) - \frac{1}{1 + e^{nx}}$$

- Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, g_n est strictement décroissante (0,75 pt)
 - En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g_n(x) > 0$ (0,75 pt)
- Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$f'_n(x) = ne^{nx} \cdot g_n(x)$$

- (0,75 pt)
 - (b) Dresser le tableau de variation de f_n (0,75 pt)
- Construire la courbe $(\mathcal{C}_2)$ (0,75 pt)
 - En utilisant une intégration par parties, calculer, en cm^2 , l'aire du domaine plan limité par la courbe $(\mathcal{C}_2)$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$. (0,75 pt)

Partie B

On considère l'équation différentielle $(E) : y' - 2y = \frac{-2}{1 + e^{-2x}}$

1. Vérifier que l'équation $f_2(x) = e^{2x} \ln(1 + e^{-2x})$ est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$. (0,75 pt)
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $(E') : y' - 2y = 0$ (0,75 pt)
3. Montrer qu'une fonction φ est solution de (E) si et seulement si $(\varphi - f_2)$ est solution de (E') (1 pt)
4. En déduire la solution générale de (E) . (0,5 pt)